eme groupe iecs

CONCOURS 1988

MATHEMATIQUES

EPREUVE : MATH I
Régime général

DUREE : 4 heures

COEFFICIENT : 4

– Problème 1 –

1) (a) Montrer que, pour tout α réel, $$e^\alpha = 1 + \alpha + \int_0^\alpha (\alpha - t)e^t dt$$

(b) On suppose que α appartient à l'intervalle $[-2, 2]$; montrer qu'alors $$0 \leq \int_0^\alpha (\alpha - t)e^t dt \leq \frac{1}{2}\alpha^2 e^2 .$$

(On pourra noter $f_1(\alpha) = \int_0^\alpha (\alpha - t)e^t dt$).

N.B. : La question 2 étant plus délicate, on pourra l'admettre dans la suite du problème.

2) On définit, pour x réel, $$u(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt .$$

Former, sans calculer les intégrales $$\frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

En appliquant le 1) à $\alpha = -h(1+t^2)$ avec $|h| < 1$ et $t \in [0,1]$, montrer que u est dérivable et que $u'(x) = -\int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt$.

3) On pose, pour x réel, $v(x) = u(x^2)$ et $w(x) = [\int_0^x e^{-t^2} dt]^2$.

(a) Montrer que v et w sont dérivables sur R.

(b) Montrer que $\forall\, x \in \mathbf{R}^* \quad v'(x) = -w'(x)$.

(c) Calculer $v(0) + w(0)$.

4) (a) Que vaut $\lim_{\alpha \to +\infty} \alpha e^{-\alpha}$? En déduire qu'il existe un réel A (qu'on ne cherchera pas à déterminer) tel que

$$\alpha > A \Longrightarrow 0 < e^{-\alpha} < \frac{1}{\alpha} .$$

(b) On suppose $x > A$; montrer que $0 \leq u(x) \leq \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^x}$. .. En déduire

$$\lim_{x \to +\infty} u(x) \quad \text{puis} \quad \lim_{x \to +\infty} v(x) .$$

5) Soit $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$. Déduire de ce qui précède l'existence de I et sa valeur.

TSVP.

– Problème 2 –

Soit $A_n = \begin{pmatrix} a_n & c_n \\ b_n & d_n \end{pmatrix}$ une matrice à coefficients réels. On dit que la suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ quand n tend vers $+\infty$ si, et seulement si, les quatre suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}, (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont pour limites respectives, lorsque n tend vers $+\infty$, a, b, c et d. On rappelle que, pour tout x réel,

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right).$$

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on notera $\exp A$, la matrice limite, si elle existe, de la matrice $A_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k$
(A^0 désignant la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$).

– I –

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que A est semblable à une matrice diagonale Δ que l'on déterminera.

2) Montrer que $\exp \Delta$ existe et donner son expression.

3) Montrer que, si une suite de matrice $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tend vers M et si B et B' sont deux matrices fixées de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, les suites de matrices $(M_nB)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B'M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont pour limites respectives MB et $B'M$.

4) Déduire du 2) et 3) que $\exp A$ existe et calculer son expression.

5) Soit m un entier naturel. Montrer que $\exp(mA)$ existe et que $\exp(mA) = (\exp A)^m$.

– II –

1) Montrer que toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ vérifie $\quad M^2 - (a+d)M + (ad-bc)I = 0$.

M est dite nilpotente s'il existe un entier naturel k tel que $M^k = 0$.

2) On suppose M nilpotente. On veut montrer que $M^2 = 0$. Soit k le plus petit entier naturel tel que $M^k = 0$.

(a) Conclure dans l'hypothèse où $k = 1$.

(b) Si $k \geq 2$, montrer, en multipliant l'égalité du 1) par des puissances bien choisies de M, que $ad - bc = 0$, puis que $a + d = 0$. Conclure.

3) Soient M et M' deux matrices nilpotentes, telles que $MM' = M'M$.

(a) Montrer, en calculant $(M + M')^3$, que $M + M'$ est nilpotente.

(b) Montrer que $\exp M$, $\exp M'$, $\exp(M + M')$ sont bien définies et que $\exp(M + M') = (\exp M).(\exp M')$.

• •
•

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail